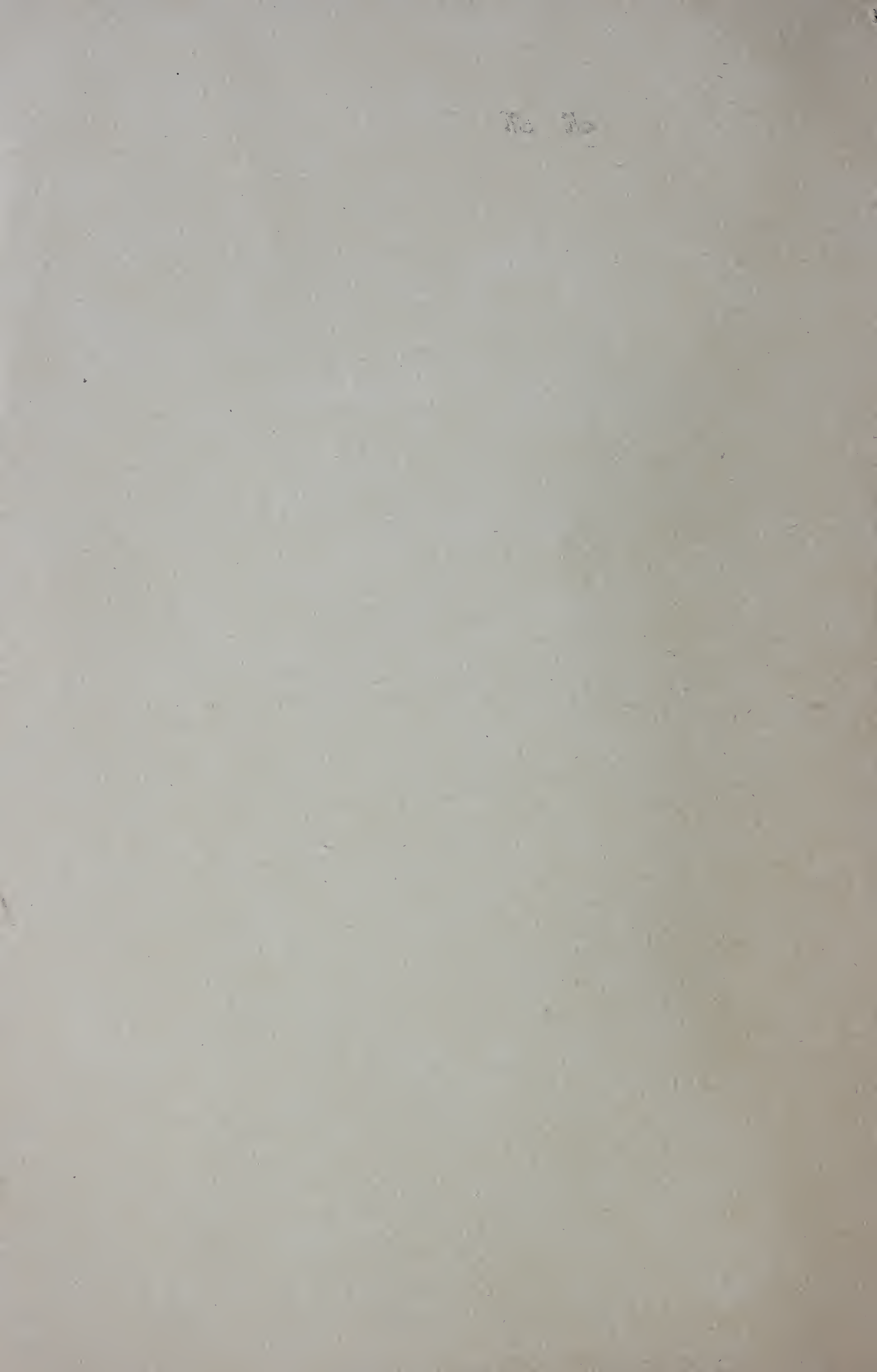
Н. М. Крыловъ.

О НѢКОТОРЫХЪ РАЗЛОЖЕНІЯХЪ ВЪ РЯДЫ ИНТЕГРАЛОВЪ ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХЪ ОПРЕДѢЛЕННЫМЪ НАЧАЛЬНЫМЪ УСЛОВІЯМЪ.

Оттискъ изъ Кіевскихъ Университетскихъ Извѣстій за 1911 г.



КІЕВЪ.
Типографія Императорскаго Университета Св. Владиміра
Акц. О-ва печ. и изд. дѣла Н. Т. Корчакъ-Новицкаго. Меринговская, 6.
1911.



Н. М. Крыловъ.

О НѢКОТОРЫХЪ РАЗЛОЖЕНІЯХЪ ВЪ РЯДЫ

ИНТЕГРАЛОВЪ

линейныхъ дифференціальныхъ уравненій,

удовлетворяющихъ

ОПРЕДѢЛЕННЫМЪ НАЧАЛЬНЫМЪ УСЛОВІЯМЪ.

Оттискъ изъ Кіевскихъ Университетскихъ Извѣстій за 1911 г.

КІЕВЪ.
Типографія Императорскаго Университета Св. Владиміра
Акц. О-ва печ. и изд. дѣла Н. Т. Корчакъ-Новицкаго. Меринговская, 6.
1911.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Университета св. Владиміра.
Оттискъ изъ Университетскихъ Извѣстій за 1911 г.

О нѣкоторыхъ разложеніяхъ въ ряды интеграловъ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, удовлетворяющихъ опредѣленнымъ начальнымъ условіямъ[1]).

Н. М. Крылова.

§ 1, Въ одномъ изъ своихъ послѣднихъ сообщеній въ Comptes Rendus de l'Académie des Sc. de Paris (7 Novembre 1910), проф. В. А. Стекловъ установилъ слѣдующую замѣчательную теорему: Всякая функція, могущая быть представленной въ формѣ:

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x)dx + C, \tag{1}$$

разлагается въ одновидно сходящійся рядъ:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k(x)\,; \text{ (для } a \leq x \leq b)$$

по фунціямъ Sturm-Liouvill'я.

Обращаясь къ особо интересующимъ насъ разложеніямъ по фундаментальнымъ функціямъ задачи поперечныхъ колебаній упругихъ стерж-

---

[1]) Читано въ качествѣ пробной лекціи въ Горномъ Институтѣ (2. 5. 1911),

ней [1]) естественнымъ представляется вопросъ попытаться, хотя бы частью, обобщить результаты проф. Стеклова и на эти разложенія, разсматривая, напримѣръ, функціи, представляемыя въ видѣ:

$$f(x)=\int\limits_a^x\int\limits_a^x \varphi(x_1)dx_1dx+C(x-a)+C_1; \tag{2}$$

т. е. функціи, первая производная которыхъ (ибо $\int\limits_a^x \varphi(x)dx$ есть непрерывная функція) имѣетъ форму (1).

Полагая:

$$\varphi(x)=\sum_0^n A_k\Phi_k''(x)+R_n^{(1)}(x);$$

(3)

$$f(x)=\sum_0^n A_k\Phi_k(x)+R_n(x);$$

имѣемъ на основаніи формулы Parseval-Стеклова, установленной для всякой интегрируемой функціи $f(x)$ [2]):

$$S_n=\int\limits_a^b q(x)R_n^2(x)dx<\varepsilon,\ \text{для}\ n\geqslant\nu.$$

Комбинація формулъ (3) и (2) даетъ намъ:

$$\int\limits_a^x\int\limits_a^x \varphi(x_1)dx_1dx=\sum_0^n A_k[\Phi_k(x)-\Phi_k(a)]-$$

(4)

$$-\sum_0^n A_k\Phi_k'(a)(x-a)+\int\limits_a^x\int\limits_a^x R_n^{(1)}(x_1)dx_1dx;$$

[1]) т. е. къ разложеніямъ, изученіе которыхъ составило предметъ нашей работы: „О разложеніяхъ въ ряды по фундаментальнымъ функціямъ, встрѣчаемыхъ при интегрированіи одного дифференціальнаго уравненія съ частными производными 4-го порядка и т. д.“. Кіевъ. 1911.

[2]) См. стр 92. Ibid.

откуда:

$$\int\limits_a^x\int\limits_a^x \varphi(x_1)dx_1dx + (x-a)f'(a) + f(a) = M + (x-a)\sum_0^n A_k\Phi_k'(a) +$$

$$+ (x-a)R_n'(a) + \sum_0^n A_k\Phi_k(a) + R_n(a)$$ [гдѣ M есть правая часть формулы (4)], т. е имѣемъ:

(5) $$R_n(x) = \int\limits_a^x\int\limits_a^x R_n(x_1)dx_1dx + R_n'(a)(x-a) + R_n(a).$$

Полагая теперь въ извѣстной формулѣ, приведенной проф. Ляпуновымъ [1]):

(6) $$\int\limits_a^b \psi_1(x)\Psi(x)dx = \Psi(b)\Psi_1(b) - \Psi(a)\Psi_1(a) - \int\limits_a^b \psi(x)\Psi_1(x)dx,$$

(гдѣ $\Psi(x) = \int\limits_a^x \psi(x_1)dx_1 + c$; $\Psi_1(x) = \int\limits_a^x \psi_1(x_1)dx_1 + c_1$) : $\psi(x) = \int\limits_a^x \varphi(x_1)dx_1 + c'$;

$$\psi_1(x) = \int\limits_a^x \varphi_1(x_1)dx_1 + c_1';$$

имѣемъ:

$$\Psi(x) = \int\limits_a^x\int\limits_a^x \varphi(x_1)dx_1dx + c'(x-a) + c;$$

$$\Psi_1(x) = \int\limits_a^x\int\limits_a^x \varphi_1(x_1)dx_1dx + c_1'(x-a) + c_1;$$

[2]) Liapounoff. Sur l'équation de Clairaut. Mémoires de l'Académie des Sc. de Petersbourg. 1904.

примемъ теперь:

$$R_n(x) = \int_a^x\int_a^x R_n^{(1)}(x_1)dx_1dx + R_n'(a)(x-a) + R_n(a) = \Psi(x) = \Psi_1(x);$$

тогда формула (6) даетъ намъ:

$$(7)\qquad R_n^2(x) = R_n^2(a) + 2\int_a^x R_n(x_1)\left[\int_a^{x_1} R_n^{(1)}(x)dx + R_n'(a)\right]dx_1 .$$

Умножая на $q(x)$ и интегрируя отъ a до b, имѣемъ изъ (7):

$$S_n = \int_a^b q(x)R_n^2(x)dx = R_n^2(a)\int_a^b q(x)dx +$$

(7′)

$$+ 2\int_a^b q(x)\left\{\int_a^x R_n(x)dx\left[\int_a^x R_n^{(1)}(x)dx + R_n'(a)\right]\right\}dx;$$

но очевидно (по формулѣ Schwarz'a):

$$R_n'(a)\int_a^b q(x)dx\int_a^x R_n(x)dx \leqq R_n'(a)\sqrt{\int_a^b q(x)^2dx\int_a^b\left[\int_a^x R_n(x)dx\right]^2dx} \leqq$$

$$(8)\qquad \leqq R_n'(a)\sqrt{\int_a^b q^2(x)dx\int_a^b\left[(b-a)\int_a^b R_n(x)^2dx\right]dx} <$$

$$< \frac{R_n'(a)(b-a)\sqrt{S_n}\sqrt{\int_a^b q^2(x)dx}}{\sqrt{\mu}},$$

гдѣ $\mu =$ minimum функціи $q(x)$; такимъ образомъ выраженіе (8) имѣетъ

предѣломъ нуль, *если соблюдено условіе* (A) *конечности* $R'_n(a)$. Съ другой стороны имѣемъ:

$$\int_a^b q(x)\left\{\int_a^x R_n(x_1)\left[\int_a^{x_1} R_n^{(1)}(x_2)dx_2\right]dx_1\right\}dx \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\int_a^b q(x)^2dx \int_a^b \left\{\int_a^x R_n(x_1)\left[\int_a^{x_1} R_n^{(1)}(x_2)dx_2\right]\right.^2 dx} <$$

(9) $$< \sqrt{\int_a^b q(x)^2dx \int_a^b dx \int_a^x R_n^2(x_1)dx_1 \int_a^x\left[\int_a^{x_1} R_n^{(1)}(x_2)dx_2\right]^2 dx_1} <$$

$$< \frac{\sqrt{\int_a^b q(x)^2dx \int_a^b dx \int_a^b q(x)R_n^2(x)dx \,.\, \int_a^b (b-a) \int_a^b p(x)R_n^{(1)2}(x)dx}}{\sqrt{\mu\,.\,\nu}} <$$

$$< \frac{\sqrt{S_n \,.\, S_n^{(1)} \,.\, \int_a^b q(x)^2dx \,.\, (b-a)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\mu\,.\,\nu}},$$

гдѣ μ и ν суть minimum'ы $q(x)$ и $p(x)$, т. е. выраженіе (9) имѣетъ предѣломъ нуль, *если соблюдено условіе* (B): $S_n^{(1)} = \int_a^b p(x)R_n^{(1)}(x)^2dx < k$, гдѣ $k = const.$

Слѣдовательно изъ формулы (7′) имѣемъ:

$$R_n^2(a) < \delta \text{ для } n \geqq N$$

и при тѣхъ же условіяхъ изъ (7) получаемъ:

$$R_n^2(x) < \alpha \text{ для } n > N, \text{ (гдѣ } lim\,\alpha = lim\,\delta = 0),$$

что и т. д.

Покажемъ, что если въ формулѣ (2) функція $\varphi(x)$ непрерывна и соблюдены граничныя условія

$$(10) \qquad f(a) = 0\,;\; f'(a) = 0\,;$$

т. е. если, другими словами, дѣло идетъ о разложеніи интеграла $f(x)$ линейнаго дифференціальнаго уравненія:

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \varphi(x)$$

[интеграла удовлетворяющаго начальнымъ условіямъ (10)] по фундаментальнымъ функціямъ соотвѣтствующимъ граничнымъ условіямъ задачи колебаній стержня, зажатаго съ одного конца и свободнаго на другомъ, т. е.:

$$\Phi_k(a) = \Phi_k'(a) = \Phi_k''(b) = \Phi_k'''(b) = 0\,,$$

покажемъ, что въ этомъ случаѣ условіе (B) удовлетворяется (условіе (A) очевидно удовлетворяется).

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ тогда:

$$(11) \qquad \varphi(x) = f''(x) = \sum_{n}^{0} A_k\Phi_k''(x) + R_n^{(1)}(x)\,,$$

откуда

$$R_n''(x) = R_n^{(1)}(x)\,;$$

изъ формулы (11) получаемъ:

$$\int_a^b p(x)R_n^{(1)}(x)^2dx = \int_a^b f''(x)^2p(x)dx - 2\sum\int_a^b p(x)f''(x)A_k\Phi_k''(x)dx +$$

$$(12) \qquad + 2\sum A_kA_r\int_a^b p(x)\Phi_k''(x)\Phi_r''(x)dx + \sum A_k^2\int_a^b p(x)\Phi_k''(x)^2dx\,,$$

но третій членъ правой части (12) равенъ нулю, такъ какъ функціи $\Phi_k''(x)$ ортогональны при функціи $p(x)$ (см. стр. 50 моей вышеупомянутой работы);

съ другой стороны, если $\Phi_k(x)$ нормированы при функціи $q(x)$, то:

$$\int_a^b p(x)\Phi_k''(x)^2 dx = \lambda_k \text{ (см. стр. 56. Ibid.),}$$

т. е. 4-ый членъ правой части (12) есть $\sum A_k^2\lambda_k$; интегрированіе же по частямъ даетъ намъ:

$$\int_a^b p(x)f''(x)\Phi_k''(x)dx = \Big| f'(x)p(x)\Phi_k''(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\frac{d[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx}dx =$$

$$= - \Big| f(x)\frac{d[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b f(x)\frac{d^2[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx^2}dx = \lambda_k \int_a^b q(x)f(x)\Phi_k(x)dx =$$

$= A_k\lambda_k$, если вышеупомянутыя граничныя условія для $f(x)$ и $\Phi_k''(x)$ соблюдены.

Такимъ образомъ изъ (12) имѣемъ:

$$\int_a^b p(x)R_n^{(1)}(x)^2 dx = \int_a^b f''(x)^2 p(x)dx - \sum \lambda_k A_k^2 < \int_a^b f''(x)^2 p(x)dx < k = const,$$

что и т. д., т. е. согласно вышеуказанному возможно освободиться отъ добавочнаго ограничительнаго условія: $f(b) = 0$ для произвольной функціи данной для разложенія.

§ 2. Для доказательства „замкнутости“ системы функцій $\Phi_n''(x)$ (свойства интереснаго самого по себѣ, а также по своимъ приложеніямъ) мы, примѣняя методъ моей, уже цитированной выше, работы докажемъ возможность разложенія „произвольныхъ“ функцій по функціямъ $\Phi_n''(x)$ и для этой цѣли, разсматривая ортогональную и нормированную систему $\Phi_n(x)$ возьмемъ за исходную точку дальнѣйшихъ разсужденій абсолютно и одновидно сходящійся рядъ (напр. при условіи непрерывности $f''(x)$]

$$\sum \int_b^x q(x)\Phi_n(x)dx \int_a^b [f(x)p(x)]''\Phi_n(x)dx =$$

$$= \sum \int_b^x \frac{d^2[p(x)\Phi_n''(x)]}{\lambda_n dx^2} dx \int_a^b [f(x)p(x)]''\Phi_n(x)dx =$$

$$= \sum \frac{d[p(x)\Phi_n''(x)]}{\lambda_n dx} \int_a^b [f(x)p(x)]''\Phi_n(x)dx,$$

если

$$\Phi_n''(b) = \Phi_n'''(b) = 0.$$

Утверждаю, что этотъ рядъ представляетъ $[p(x)f(x)]'$; въ самомъ дѣлѣ, полагая:

$$(17) \qquad [p(x)f(x)]' - \sum \frac{d[p(x)\Phi_n''(x)]}{\lambda_n dx} \int_a^b [f(x)p(x)]''\Phi_n(x)dx = P(x),$$

имѣемъ съ другой стороны:

$$\int_a^b [p(x)f(x)]'\Phi_n'(x)dx = -\int_a^b \Phi_n(x)[p(x)f(x)]''dx,$$ если только $\Phi_n(a) = 0$ и

$f(b) = f'(b) = 0$, а также

$$\int_a^b \frac{d[p(x)\Phi_n''(x)]}{\lambda_n dx} \Phi_m'(x)dx = \frac{-\lambda_m}{\lambda_n} \int_a^b \Phi_m\Phi_n dx = \begin{cases} -1, & \text{если } m = n \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

Слѣдовательно:

$$(\alpha) \quad \int_a^b P(x)\Phi_n'(x)dx = 0\,;$$

но очевидно

$$(\beta) \quad \int_a^b P(x)\Phi'_n(x)dx = \Big| \Phi_n(x)P(x) \Big|_a^b - \int_a^b \Phi_n(x)\frac{dP(x)}{dx}dx =$$

$$= -\int_a^b \Phi_n(x)\frac{dP(x)}{dx}dx\,, \text{ если } \Phi_n''(b) = \Phi_n'''(b) = 0\,.$$

При соблюденіи условій существованія 4-хъ первыхъ производныхъ для $f(x)$ и нѣкоторыхъ опредѣленныхъ граничныхъ условій, рядъ получаемый изъ $P(x)$ дифференцированіемъ почленно, т. е. рядъ:

$$\sum q(x)\Phi_n(x)\int_a^b [f(x)p(x)]''\Phi_n(x)dx$$

будетъ одновидно сходящимся, а потому и представитъ непрерывную функцію равную $\frac{dP(x)}{dx}$, и тогда формулы (α) и (β) приводятъ къ противорѣчію, слѣдовательно $P(x) \equiv 0$.

Интегрируя почленно формулу (17) въ предѣлахъ отъ b до x, имѣемъ:

$$(17') \qquad p(x)f(x) = \sum \frac{p(x)\Phi_n''(x)}{\lambda_n}\int_a^b [p(x)f(x)]''\Phi_n(x)dx\,,$$

причемъ разложенію правой части (17') можно придать видъ, предопредѣ-

ленный для разложеній по способу наименьшихъ квадратовъ; въ самомъ дѣлѣ,

$$\int_a^b [p(x)f(x)]''\Phi_n(x)dx = \Big|_a^b \Phi_n(x)[p(x)f(x)]' - \int_a^b [p(x)f(x)]'\Phi_n'(x)dx =$$

$$= - \Big|_a^b \Phi_n'(x)[p(x)f(x)] + \int_a^b p(x)f(x)\Phi_n''(x)dx$$

и съ другой стороны имѣемъ

$$\int_a^b p(x)\Phi_n''(x)^2 dx = \lambda_n, \text{ если только } \int_a^b q(x)\Phi_n^2(x)dx = 1 .$$

Такимъ образомъ окончательно:

$$f(x) = \sum \frac{\Phi_n''(x) \int_a^b f(x)p(x)\Phi_n''(x)dx}{\int_a^b p(x)\Phi_n''^2(x)dx},$$

т. е. разложеніе типа Fourier по функціямъ $\Phi_n''(x)$.

Отсюда обычнымъ разсужденіемъ убѣждаемся въ справедливости формулы Parseval-Стеклова (см. стр. 92. Ibid.) для функціи $f(x)$, удовлетворяющей условіямъ предъидущаго разложенія по $\Phi_n''(x)$.

Разсматривая теперь функцію $\psi(x)$ удовлетворяющую граничнымъ условіямъ, обладающую 4-мя первыми производными въ интервалѣ и такую, чтобы $f(x) = \psi(x)$ въ (a_1, b_1), гдѣ $a < a_1 < b_1 < b$, имѣемъ, если $f(x) - \psi(x)$ зависитъ только отъ $\psi(x)$, формулу проф. Стеклова для $f(x)$, а затѣмъ обычнымъ разсужденіемъ проф. Стеклова можно перейти ко всякой интегрируемой функціи $F(x)$, для которой и будетъ такимъ образомъ установлена фор-

мула „уравненія замкнутости", какъ называетъ ее проф. Стекловъ [1]):

$$\int_a^b p(x)F(x)^2dx = \sum A_n^2 = \sum \left[\int_a^b p(x)F(x)\Phi_n''(x)dx \right]^2.$$

---

[1]) Разсматривая ортогональную и *нормированную* систему функцій $\Phi_k''(x)$, можемъ на основаніи извѣстной леммы Schmidt'a утверждать абсолютную и одновидную сходимость ряда:

$$\sum \int_a^x \Phi_k''(x)dx \int_a^b \varphi(x)p(x)\Phi_k''(x)dx,$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть непрерывная функція; слѣдовательно имѣемъ и такую непрерывную функцію:

$$\psi(x) = \sum \int_a^x \int_a^x \Phi_k''(x_1)dx_1 dx \int_a^b \varphi(x)p(x)\Phi_k''(x)dx =$$

(13)

$$= \sum \Phi_k(x) \int_a^b \varphi(x)p(x)\Phi_k''(x)dx,$$

гдѣ рядъ правой части формулы можетъ быть дифференцированъ почленно. причемъ $\psi(a) = \psi'(a) = 0$.

Положимъ теперь:

(14) $$h(x) = C_1(x) - \psi(x),$$

гдѣ $C_1(x)$ есть интегралъ уравненія:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x),$$

удовлетворяющій начальнымъ условіямъ $C_1(a) = C_1'(a) = 0$; тогда умножая (14) на $\dfrac{d^2[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx^2}$ и интегрируя, имѣемъ:

§ 3. Обобщая предыдущія разсужденія, займемся теперь разсмотрѣніемъ общаго вопроса о разложеніи интеграла линейнаго дифференціальнаго уравненія „n“ порядка:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y^{(1)} + a_n(x) y = p(x)\,, \tag{18}$$

удовлетворяющаго начальнымъ условіямъ:

$$y(a) = y'(a) = \ldots y^{(n-1)}(a) = 0\,, \tag{19}$$

причемъ $a_i(x)$ будутъ конечныя и непрерывныя функціи отъ x.

Методомъ варіаціи произвольныхъ постоянныхъ подобный интегралъ былъ найденъ для одного дифференціальнаго уравненія 4-го порядка на

$$\int_a^b h(x) \frac{d^2[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx^2} dx = \int_a^b C_1(x) \frac{d^2[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx^2} dx -$$

(15)

$$-\sum \int_a^b \Phi_k(x) \frac{d^2[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx^2} dx \int_a^b p(x)\varphi(x)\Phi_k''(x) dx\,,$$

но

$$\int_a^b h(x) \frac{d^2[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx^2} dx = \left| h(x) \frac{d[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx} \right|_a^b -$$

$$-\int_a^b h'(x) \frac{d[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx} dx = \left| -h'(x) p(x) \Phi_k''(x) \right|_a^b + \int_a^b p(x) h''(x) \Phi_k''(x) dx$$

и также:

$$\int_a^b C_1(x) \frac{d^2[p(x)\Phi_k''(x)]}{dx^2} dx = \int_a^b p(x) C_1''(x)\, \Phi_k''(x) dx\,,$$

стр. 15 (Ibid.); для общаго случая онъ можетъ быть представленъ, какъ легко это замѣтить, въ видѣ:

$$Y(x)=\sum_{i=1}^{i=n} y_i(x)\int_a^x \frac{\Delta^{y^{(n-1)}}(z)\,p(z)dz}{\Delta(z)}\,dz=$$

$$=\int_a^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(z),\, y_2(z) \ldots y_n(z) \\ y_1'(z),\, y_2'(z) \ldots y_n'(z) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-2)}(z) \ldots\ldots y_n^{(n-2)}(z) \\ y_1(x) \ldots\ldots\ldots y_n(x) \end{vmatrix}}{\Delta(z)}\,p(z)dz=\int_a^x K(x,z)p(z)dz\,,$$

а потому формула (15) даетъ намъ:

$$\int_a^b h''(x)p(x)\Phi_k''(x)dx=\int_a^b p(x)\varphi(x)\Phi_k''(x)dx-$$

$$-\int_a^b p(x)\Phi_k''(x)^2dx\int_a^b \varphi(x)p(x)\Phi_k''(x)dx\,.$$

Отсюда, принимая во вниманіе нормированность $\Phi_k''(x)$ при функціи $p(x)$, имѣемъ:

$$(16)\quad \int_a^b h''(x)p(x)\Phi_k''(x)dx=\int_a^b p(x)\varphi(x)\Phi_k''(x)dx-\int_a^b p(x)\varphi(x)\Phi_k''(x)dx=0\,;$$

принимая во вниманіе вышедоказанное свойство „замкнутости“ системы $\Phi_k''(x)$, изъ (16) имѣемъ право утверждать, что $h''(x)=0$, но изъ (14) $h'(a)=0$, слѣдовательно $h'(x)=0$ и такъ какъ съ другой стороны $h(a)=0$, то и $h(x)=0$, т. е.

гдѣ

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} y_1(z), y_2(z) \dots y_n(z) \\ y_1'(z) \dots\dots\dots y_n'(z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(z) \dots\dots y_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix}; \Delta^{y_i} = \text{минору } y_i^{(n-1)} \text{ въ опредѣлителѣ } \Delta(z)$$

и $y_1(x)$, $y_2(x) \dots y_n(x)$ есть система n линейно независимыхъ интеграловъ уравненія (18) безъ второй части, интеграловъ удовлетворяющихъ опредѣленнымъ начальнымъ условіямъ, при которыхъ $\Delta(a) \neq 0$.

Тогда въ интервалѣ (a, b) конечности и непрерывности коефиціентовъ $a_i(x)$, опредѣлитель $\Delta(z)$ будетъ отличенъ отъ нуля и представляя собой конечную и непрерывную функцію, имѣетъ своимъ нижнимъ предѣломъ (здѣсь мы имѣемъ право говорить о нижнемъ предѣлѣ, а не о нижней границѣ, ибо дѣло идетъ о непрерывныхъ функціяхъ) нѣкоторое количество α отличное отъ нуля, т. е.

$$lim_{inf} | \Delta(z) | = \alpha .$$

Съ другой стороны члены опредѣлителя, стоящаго въ числителѣ выраженія $K(x, z)$ суть конечныя и непрерывныя функціи въ интервалѣ a, b, а потому въ виду конечности общаго ихъ числа n, можно назначить нѣкоторое опредѣленное число β и при томъ такое, что модули всѣхъ членовъ вышеупомянутаго опредѣлителя будутъ $\leqq \beta$; тогда по извѣстной Hadamard'а относительно maxima'льной величины опредѣлителей, имѣемъ, что абсолютная величина интересующаго насъ опредѣлителя будетъ менѣе

$$\beta^n \sqrt{n^n},$$

а потому имѣемъ окончательно:

$$| K(x, z) | < \frac{\beta^n \sqrt{n^n}}{\alpha} < A = const.$$

рядъ (13) представитъ интегралъ $C_1(x)$, если только сдѣлаемъ добавочное условіе относительно существованія второй производной (которой мы пользовались) отъ $h(x)$, для каковой цѣли необходимо выйти изъ области дѣйствительныхъ перемѣнныхъ, сдѣлавъ предположеніе объ аналитичности входящихъ въ формулы функцій, чтобы имѣть возможность изъ существованія первой производной заключить о существованіи остальныхъ.

Подобнымъ же образомъ легко доказывается, что:

$$\left|\frac{\partial^m K(x,z)}{\partial x^m}\right| < B = const., \text{ гдѣ } m = 1, 2, \ldots n-1 .$$

Полагая теперь:

$$f(x,z) = K(x,z), \text{ если } z \leqq x;$$

$$f(x,z) = 0 \quad , \text{ если } z > x;$$

имѣемъ возможность представить интересующій насъ интегралъ уравненія (18), равно какъ и его первыя $(n-1)$ производныхъ въ видѣ:

$$Y(x) = \int_a^b f(x,z)p(z)dz,$$

гдѣ

(20) $$\int_a^b f(x,z)^2 dz < A^2(b-a) = A_1 = const.;$$

$$Y^{(i)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^i K(x,z)}{\partial x^i} p(z)dz = \int_a^b f_i(x,z)p(z)dz,$$

гдѣ

$$\int_a^b f_i(x,z)^2 dz < B^2(b-a) = B_1 = const.$$

Пусть теперь

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x) \ldots \Phi_n(x)$$

нѣкоторая заданная, „замкнутая“ въ обобщенномъ смыслѣ система нормированныхъ ортогональныхъ функцій и пусть напр. φ_μ будутъ интегралы уравненія:

$$L(\varphi_\mu) = \Phi_\mu(x),$$

удовлетворяющіе начальнымъ условіямъ:

$$\varphi_\mu(a) = \varphi_\mu'(a) = \ldots \varphi_\mu^{(n-1)}(a) = 0,$$

тогда на основаніи предъидущаго можемъ написать:

$$\varphi_\mu(x) = \int_a^b f(x, z)\Phi_\mu(z)dz\,.$$

Примѣняя теперь обобщенную формулу проф. Стеклова [1]), для разложенія интеграла отъ произведенія двухъ функцій, можемъ сразу написать: *требуемое разложеніе искомаго интеграла уравненія* (18) *при начальныхъ условіяхъ* (19) *въ абсолютно и одновидно сходящійся рядъ по функціямъ* $\varphi_\mu(x)$ *на основаніи свойства* $f(x,z)$, *выраженнаго формулой* (20).

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$Y(x) = \int_a^b f(x, z)p(z)dz = \tag{I}$$

$$= \sum \int_a^b f(x, z)\Phi_\mu(x)dx \int_a^b p(z)\Phi_\mu(z)dz = \sum_1^\infty \varphi_\mu(x) \int_a^b p(z)\Phi_\mu(z)dz\,,$$

т. е. получаемъ новый видъ разложеній (или, вѣрнѣе безконечное число различныхъ видовъ, ибо форма L произвольна), заключающихъ таковыя же Schmidt'а [2]) какъ частный случай и притомъ по функціямъ $\varphi_\mu(x)$ такимъ, что не:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0\,, & \text{если } m \neq n \\ 1\,, & \text{если } m = n \end{cases};$$

но

$$\int_a^b L[\varphi_n(x)]L[\varphi_m(x)]dx = \begin{cases} 0\,, & \text{если } m \neq n \\ 1\,, & \text{если } m = n \end{cases};$$

---

[1]) Приведенную напр. на стр. 88. Ibidem.

[2]) Стр. 476. Mathematische Annalen Bd. 63.

такую систему функцій $\varphi_\mu(x)$ можно было бы назвать *quasi-ортогональной* (или дифференціально-ортогональной напр.).

Къ разложенію по функціямъ $\varphi_\mu(x)$ можно было бы придти еще и такимъ образомъ: пусть

$$f(x) = \sum_1^n \varphi_\mu(x) \int_a^b p(z) \Phi_\mu(z) dz + R_n(x) ;$$

$$p(x) = \sum_1^n \Phi_\mu(x) \int_a^b p(z) \Phi_\mu(z) dz + R_n^{(1)}(x) ;$$

тогда очевидно:

(20) $$R_n(a) = 0 ; \; R_n'(a) = 0 \; . \; . \; . \; R_n^{(n-1)}(a) = 0$$

и съ другой стороны, дифференцируя, имѣемъ:

(21) $$L[R_n(x)] = R_n^{(1)}(x) ,$$

если

$$L[f(x)] = p(x) \text{ и } L[\varphi_\mu(x)] = \Phi_\mu(x) .$$

Тогда изъ уравненій (20) и (21) на основаніи вышеуказанной леммы, имѣемъ:

(23) $$R_n(x) = \int_a^b f(x,z) R_n^{(1)}(z) dz ,$$

но въ виду ортогональности нормированной системы $\Phi_\mu(x)$ имѣемъ для всякой ограниченной, интегрируемой [а въ частности и для непрерывной функціи $p(x)$] :

$$lim_{n=\infty} \int_a^b R_n^{(1)\,2}(x) dx = 0 ,$$ [1]

---

[1]) т. е. $\int_a^b R_n^{(1)\,2}(x) dx < \varepsilon$ для $n \geqslant \nu$.

съ другой же стороны изъ (22) въ силу неравенства Schwarz'a, имѣемъ:

$$|R_n(x)|^2 < \int_a^b f(x,z)^2 dz \int_a^b R_n^{(1)2}(x)^2 dx,$$

т. е. $\lim |R_n(x)| = 0$, т. е. рядъ:

$$(23) \qquad \sum \varphi_\mu(x) \int_a^b p(z) \Phi_\mu(z) dz$$

будетъ одновидно сходящимся.

Ряды, полученные изъ (23) почленнымъ дифференцированіемъ до $(n-1)$ порядка будутъ также одновидно сходящимися, какъ это можно видѣть напр. изъ формулы (22), вспоминая, что $\int_a^b f_i(x,z)^2 dz < B_1$.

Надлежитъ замѣтить, что сходимость этихъ рядовъ, какъ одновидная, такъ и абсолютная всего проще видна, представляя рядъ (23) (на основаніи вышедоказанной леммы) въ видѣ:

$$\sum \int_a^b f(x,z) \Phi_\mu(z) dz \int_a^b p(z) \Phi_\mu(z) dz$$

и примѣняя лемму Schmidt'a о сходимости.

Утверждаемъ, что рядъ (23) дѣйствительно представляетъ собой функцію $f(x)$; въ самомъ дѣлѣ, полагая,

$$(24) \qquad f(x) - \sum_1^\infty \varphi_\mu(x) \int_a^b p(z) \Phi_\mu(z) dz = P(x)$$

умножимъ обѣ части (24) на $M[\Phi_\mu(z)]$, гдѣ $M[y(z)]$ есть дифференціаль-

ное выраженіе присоединенное къ $L[y(z)]$, т. е.:

$$a_n(x)y - \frac{d(a_{n-1}y)}{dx} + \frac{d^2(a_{n-2}y)}{dx^2} + \cdots (-1)^n \frac{d^ny}{dx^n},$$

имѣемъ, интегрируя отъ a до b:

$$\int_a^b f(x)M[\Phi_\mu(x)]dx - \sum \int_a^b \varphi_\mu(x)M[\Phi_\mu(x)]dx \int_a^b p(z)\Phi_{\mu_1}(z)dz =$$

$$= \int_a^b p(x)M[\Phi_\mu(x)]dx.$$

Отсюда, интегрируя по частямъ, получаемъ:

$$\int_a^b f(x)M[\Phi_\mu(x)]dx = \int_a^b \Phi_\mu(x)L[f(x)]dx + A[f(x), \Phi_\mu(x)] =$$

$$= \int_a^b \Phi_\mu(x)p(x)dx + A[f(x), \Phi_\mu(x)],$$

гдѣ

$$A(f, \Phi_\mu) = \Big\{ f\left(a_{n-1}\Phi_\mu - \frac{d(a_{n-2}\Phi_\mu)}{dx} + \cdots (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}\Phi_\mu}{dx^{n-1}}\right) +$$

$$+ f'\left(a_{n-2}\Phi_\mu + \frac{d(a_{n-3}\Phi_\mu)}{dx} + \cdots (-1)^n \frac{d^{n-2}\Phi_\mu}{dx^{n-2}}\right) + \ldots f^{(n-1)}\Phi_\mu \Big\}_b^a;$$

кромѣ того:

$$\int_a^b \varphi_\mu(x)M[\Phi_\mu(x)]dx = \int_a^b \Phi_\mu(x)L[\varphi_{\mu_1}(x)]dx + A[\varphi_{\mu_1}(x), \Phi_\mu(x)] =$$

$$= \int_a^b \Phi_\mu(x)\Phi_{\mu_1}(x)dx + A[\varphi_{\mu_1}(x), \Phi_\mu(x)];$$

$$\int_a^b P(x)M[\Phi_\mu(x)]dx = \int_a^b \Phi_\mu(z)L[P(z)]dz + A[P(z)\,,\,\Phi_\mu(z)]\,;$$

съ другой стороны замѣчаемъ, что въ выраженіе $A(\;)$ входятъ производныя включительно только до $(n-1)$ порядка, но до этого порядка можно дифференцировать почленно ряды (23), получая при этомъ абсолютно и одновидно сходящіеся ряды, слѣдовательно:

$$A[P(x)\,,\,\Phi_\mu(x)] = A[f(x)\,,\,\Phi_\mu(x)] - \sum_{\mu_1=1}^{\mu_1=\infty} A(\varphi_{\mu_1}\,,\,\Phi_\mu)\int_a^b p(z)\Phi_{\mu_1}(z)dz\,,$$

а потому имѣемъ окончательно:

$$\int_a^b \Phi_\mu(x)p(x)dx - \int_a^b p(z)\Phi_\mu(z)dz = 0 = \int_a^b \Phi_\mu(x)L[P(x)]dx\,,\ \text{для}\ \mu = 1, 2 \ldots \infty.$$

При замкнутости системы $\Phi_\mu(x)$ имѣемъ отсюда

$$L[P(x)] = 0\,;$$

но изъ формулы (24) видимъ, что $P(x)$ вмѣстѣ со своими $(n-1)$ первыми производными равны нулю при $x = a$, а потому $P(x) \equiv 0$, что и т. д. Для заключенія о существованіи n-ой производной отъ $P(x)$ здѣсь также надо выйти изъ области дѣйствительныхъ перемѣнныхъ, сдѣлавъ предположеніе объ аналитичности входящихъ въ формулы функцій (см. замѣчаніе къ стр. 14 н. р.).

Такимъ образомъ устанавливается формула разложенія (I) для интеграла $Y(x)$ уравненія (18), интеграла удовлетворяющаго условіямъ (19).

Общій случай, т. е. когда:

$$y(a) = c\,;\ y'(a) = c'\,;\ \ldots\ y^{(n-1)}(a) = c^{n-1},$$

можетъ быть приведенъ къ предъидущему, разсматривая такую функцію $t(x)$ конечную и непрерывную вмѣстѣ со своими n первыми производными, чтобы

$$t(a) = c\,;\ t'(a) = c'\,;\ \ldots\ t^{(n-1)}(a) = c^{n-1}\,;$$

тогда очевидно къ функціи $R(x)$ = интегралу дифференціальнаго уравненія:

$$L[R(x)] = L[y(x)] - L[t(x)] = p(x) - L[t(x)],$$

какъ удовлетворяющему граничнымъ условіямъ (19) примѣняется предъидущая формула разложенія, т. е.:

$$R(x) = \sum \varphi_\mu(x) \int_a^b \{p(x) - L[t(x)]\} \Phi_\mu(x) dx = \sum \varphi_\mu(x) \int_a^b p(x) \Phi_\mu(x) dx -$$

$$- \sum \varphi_\mu(x) \int_a^b L[t(x)] \Phi_\mu(x) dx,$$ а потому, т. к. $R(x) = y(x) - t(x)$,

имѣемъ требуемое разложеніе:

$$y(x) = t(x) + \sum \varphi_\mu(x) \int_a^b p(x) \Phi_\mu(x) dx - \sum \varphi_\mu(x) \int_a^b L[t(x)] \Phi_\mu(x) dx.$$

Замѣтимъ, что вѣроятнѣе всего, именно аналогичнымъ путемъ, геометры подойдутъ къ постановкѣ вопроса о разложеніяхъ по такъ называемымъ полиномамъ Stieltjes'a (полиномамъ не образующимъ ортогональную и нормированную систему) обладающимъ нѣкоторыми замѣчательными свойствами [1]).

---

[1]) (См. Correspondance d'Hermite et de Stieltjes'a), Humbert: Journal de l'Ecole Polytechnique 1880.